Algorithmische Methoden zur Berechnung von Zweischleifen-Vierbeinfunktionen

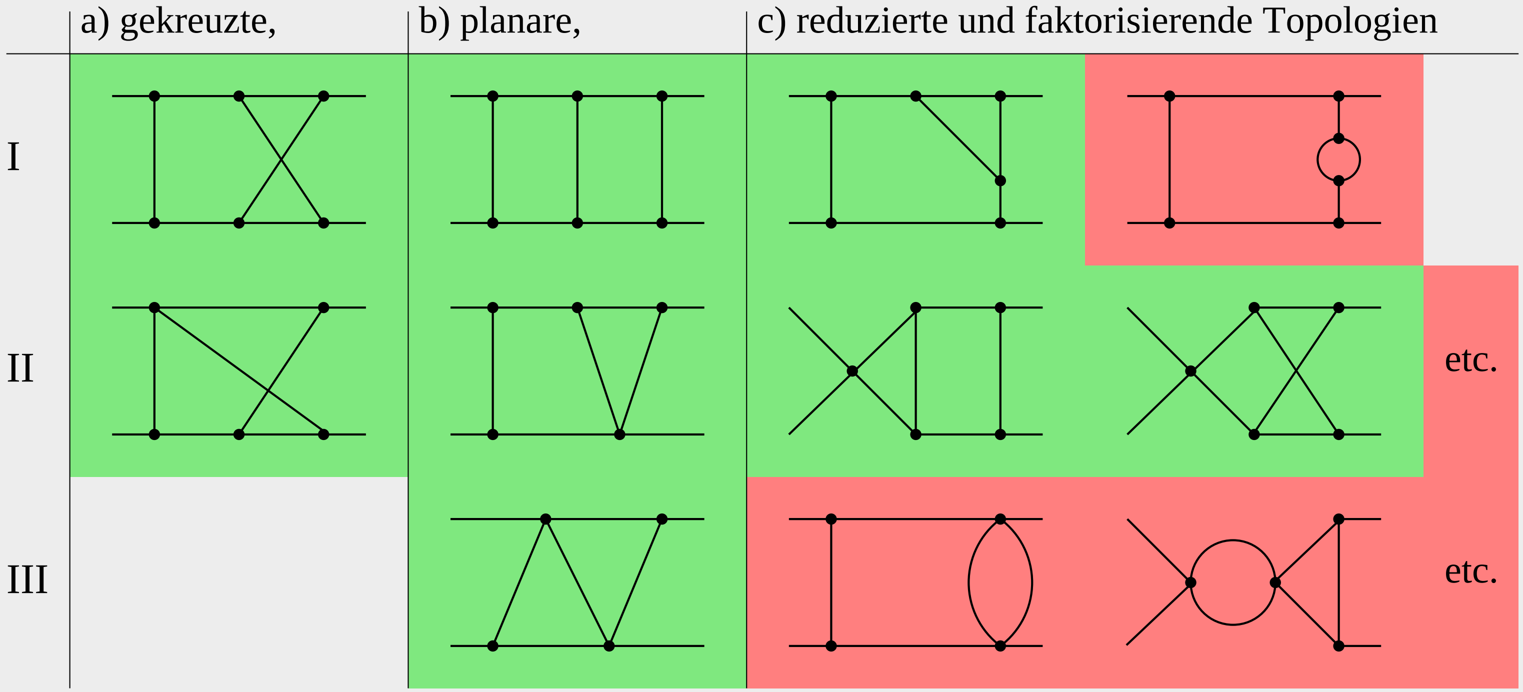
Richard B. Kreckel

Mainz, Juli 2002

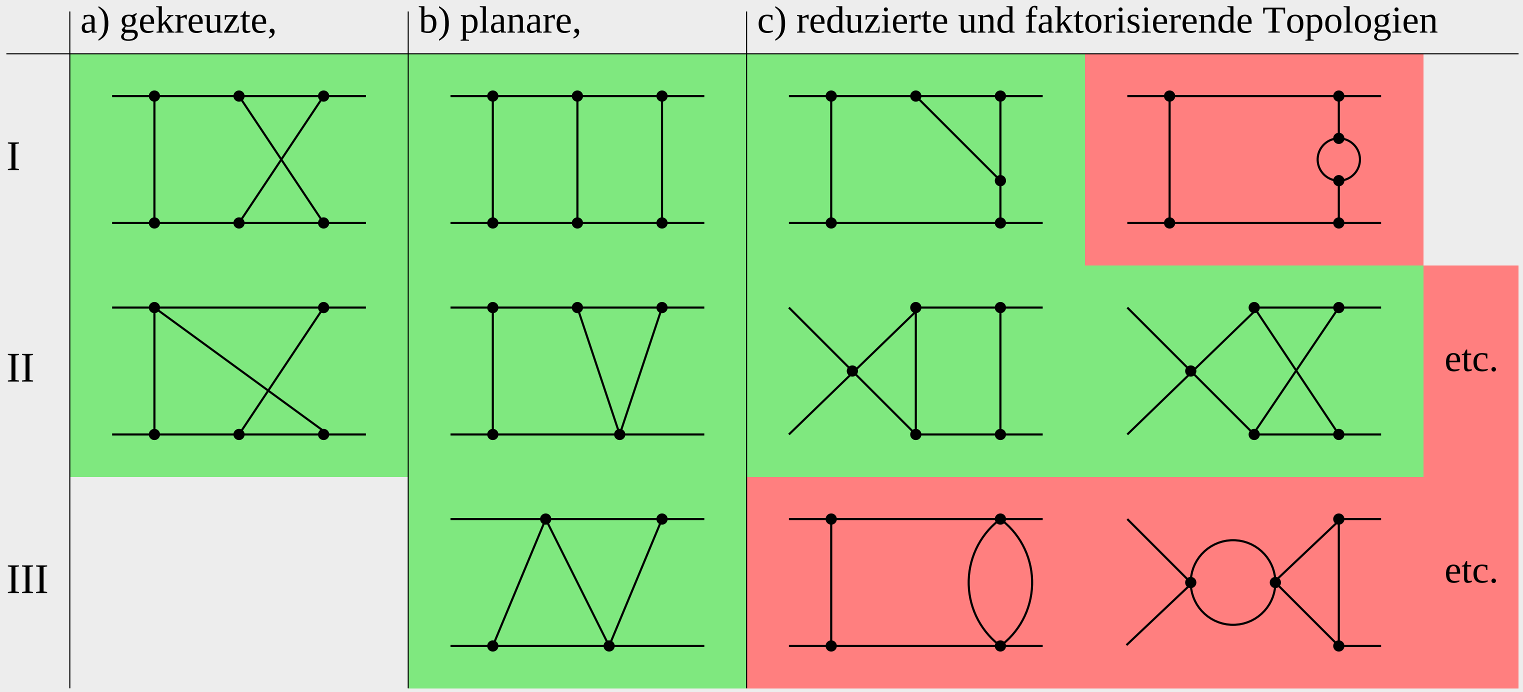
Überblick

- Die skalaren Zweischleifen-Vierbeinfunktionen
- Propagatorlinearisierung
- Symbolische Zusammenfassungen
  - Der Satz über die Residuensumme
  - Der Satz von Sylvester
- Gebietsvereinfachungen
- Zusammenfassung und Ausblick

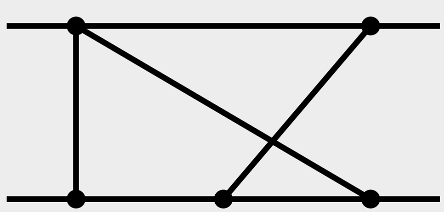
Die skalaren Zweischleifen-Vierbeinfunktionen

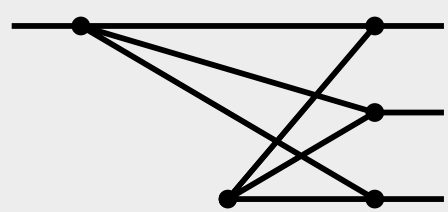


Die skalaren Zweischleifen-Vierbeinfunktionen

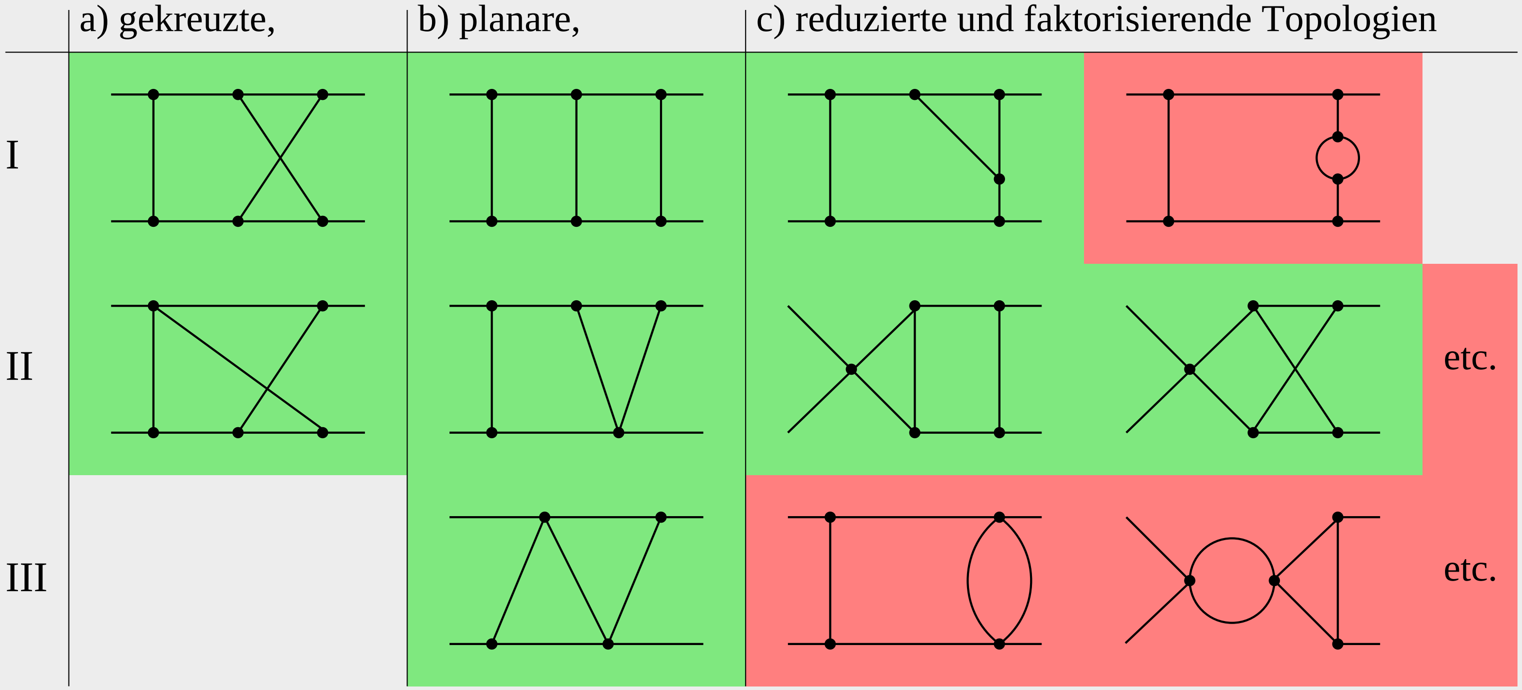


Ziel: Vollständige automatisierte Berechnung aller Amplituden in allen möglichen Impulskonstellationen.

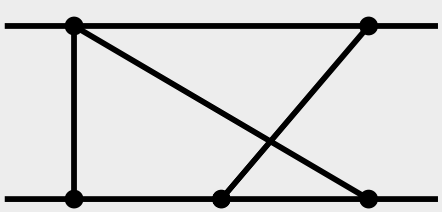


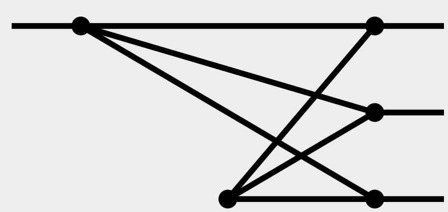


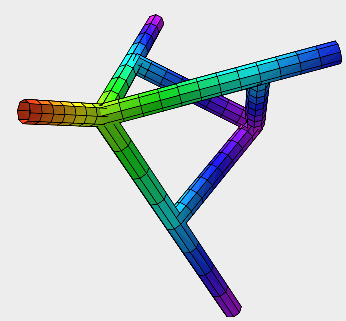
Die skalaren Zweischleifen-Vierbeinfunktionen



Ziel: Vollständige automatisierte Berechnung aller Amplituden in allen möglichen Impulskonstellationen.







Propagatorlinearisierung

„Kreimer-Rotation": Seien $P_q = q_\mu q^\mu - m^2 + i\rho$ inverse Propagatoren mit Impulsfluss q^μ (äußere *und* innere Impulse) und j der Lorentzindex einer Orthogonalraumkomponente. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dl_j \int_{-\infty}^{+\infty} dk_j \, \frac{1}{P_l\big(l_j^2\big)\, P_{l+k}\big((l_j+k_j)^2\big)\, P_k\big(k_j^2\big)\cdots}$$
$$= \; -\int_{-\infty}^{+\infty} dl_j \int_{-\infty}^{+\infty} dk_j \, \frac{1}{P_l\big(-l_j^2\big)\, P_{l+k}\big(-(l_j+k_j)^2\big)\, P_k\big(-k_j^2\big)\cdots}.$$

Rotation der 3-Achse in Orthogonalraum $\Rightarrow\ (+,-,-,-) \ \rightarrow\ (+,-,-,+)$.

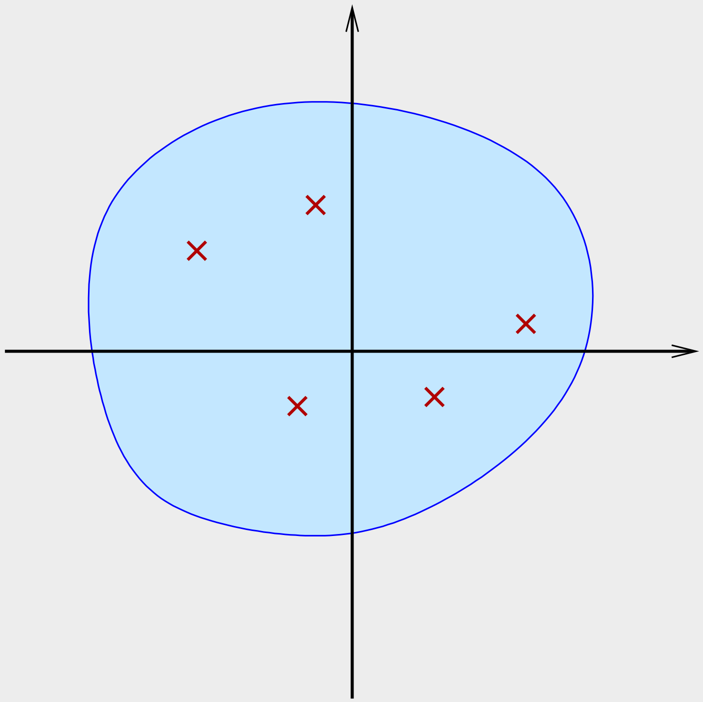
$$l_0 \rightarrow l_0 + l_1, \qquad k_0 \rightarrow k_0 + k_1,$$
$$l_3 \rightarrow l_3 + l_2, \qquad k_3 \rightarrow k_3 + k_2.$$

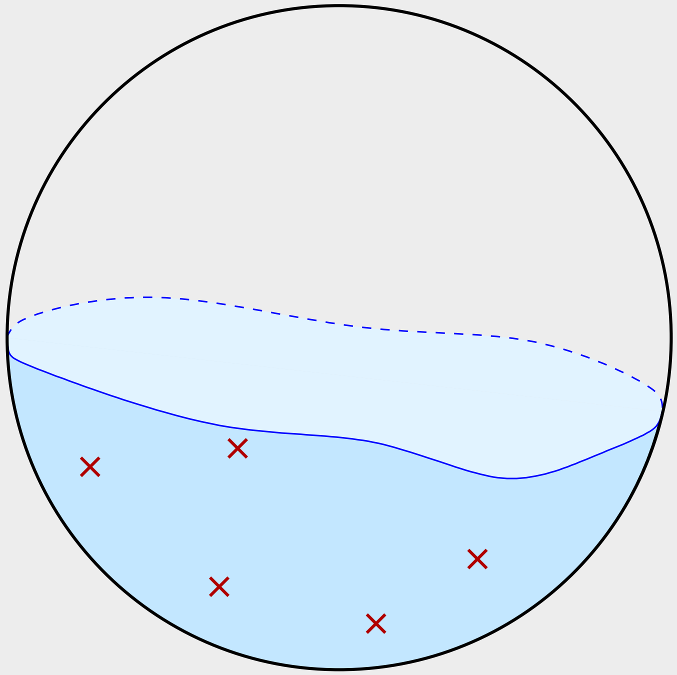
Effekt:

$$\begin{aligned} P_{l+p} &= (l+p)^2 - m^2 + i\rho \\ &= (l_0+p_0)^2 - (l_1+p_1)^2 - (l_2+p_2)^2 - l_3^2 - m^2 + i\rho \\ &\longrightarrow (l_0+p_0)^2 + 2\, l_1\, (l_0+p_0-p_1) - p_1^2 - 2\, l_2\, (p_2-l_3) - p_2^2 + l_3^2 - m^2 + i\rho. \end{aligned}$$

Symbolische Zusammenfassungen (Der Satz über die Residuensumme)

Sei $f(\zeta)$ bis auf isolierte Pole eindeutig und holomorph, dann verschwindet $\sum \operatorname{Res} f(\zeta)$.





$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\zeta=z_i} f(\zeta) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\oint f(\zeta)d\zeta \quad = \quad 0$$

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{\zeta=z_n} f(\zeta) \quad = \quad -\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname*{Res}_{\zeta=z_i} f(\zeta)}$$

Symbolische Zusammenfassungen (Der Satz von Sylvester)

Betrachte Aufsuchen der Nullstellen als Elimination einer Matrix

$$\begin{pmatrix} P_1(l_1,l_2) \\ P_2(l_1,l_2) \\ \vdots \\ P_n(l_1,l_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauß-Vorschrift:

$$m_{i,j}^{(0)} = m_{i,j}, \qquad m_{i,j}^{(k+1)} = m_{i,j}^{(k)} - \frac{m_{i,k}^{(k)} m_{k,j}^{(k)}}{m_{k,k}^{(k)}}, \qquad \begin{array}{l} 0 \le k < n-1 \\ k \le i < n \\ k < j < n \end{array}$$

0) $$\begin{pmatrix} P_1^{(0)}(l_1,l_2) \\ P_2^{(0)}(l_1,l_2) \\ P_3^{(0)}(l_1,l_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $$\begin{pmatrix} P_2^{(1)}(l_2) \\ P_3^{(1)}(l_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \beta'_{22} & \alpha'_2 \\ \beta'_{32} & \alpha'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{22} - \dfrac{\beta_{21}\beta_{12}}{\beta_{11}} & \alpha_2 - \dfrac{\beta_{21}\alpha_1}{\beta_{11}} \\ \beta_{32} - \dfrac{\beta_{31}\beta_{12}}{\beta_{11}} & \alpha_3 - \dfrac{\beta_{31}\alpha_1}{\beta_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} P_3^{(2)} \end{pmatrix} = \alpha'_3 - \frac{\beta'_{32}\alpha'_2}{\beta'_{22}} = \left(\alpha_3 - \frac{\beta_{31}\alpha_1}{\beta_{11}}\right) - \frac{\left(\beta_{32} - \dfrac{\beta_{31}\beta_{12}}{\beta_{11}}\right)\left(\alpha_2 - \dfrac{\beta_{21}\alpha_1}{\beta_{11}}\right)}{\left(\beta_{22} - \dfrac{\beta_{21}\beta_{12}}{\beta_{11}}\right)}$$

Symbolische Zusammenfassungen (Der Satz von Sylvester)

Betrachte Aufsuchen der Nullstellen als Elimination einer Matrix

$$\begin{pmatrix} P_1(l_1,l_2) \\ P_2(l_1,l_2) \\ \vdots \\ P_n(l_1,l_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bareiss-Vorschrift:

$$m_{i,j}^{(0)} = m_{i,j}, \qquad m_{-1,-1}^{(-1)} = 1, \qquad m_{i,j}^{(k+1)} = \frac{m_{i,j}^{(k)} m_{k,k}^{(k)} - m_{i,k}^{(k)} m_{k,j}^{(k)}}{m_{k-1,k-1}^{(k-1)}}, \qquad \begin{array}{l} 0 \le k < n-1 \\ k \le i < n \\ k < j < n \end{array}$$

0) $$\begin{pmatrix} P_1^{(0)}(l_1,l_2) \\ P_2^{(0)}(l_1,l_2) \\ P_3^{(0)}(l_1,l_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $$\begin{pmatrix} P_2^{(1)}(l_2) \\ P_3^{(1)}(l_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \beta'_{22} & \alpha'_2 \\ \beta'_{32} & \alpha'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12} & \alpha_2\beta_{11} - \beta_{21}\alpha_1 \\ \beta_{32}\beta_{11} - \beta_{31}\beta_{12} & \alpha_3\beta_{11} - \beta_{31}\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} P_3^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{(\alpha_3\beta_{11} - \beta_{31}\alpha_1)(\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{12}) - (\beta_{32}\beta_{11} - \beta_{31}\beta_{12})(\alpha_2\beta_{11} - \beta_{21}\alpha_1)}{\beta_{11}}$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \alpha_3 \end{vmatrix}.$$

(ohne ggT!)

Symbolische Zusammenfassungen (Der Satz von Sylvester)

$$\text{Sei} \qquad \begin{pmatrix} P_1(l_1,l_2) \\ P_2(l_1,l_2) \\ \vdots \\ P_n(l_1,l_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Falls $\int dl_1 dl_2 \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i(l_1,l_2)}$ exisitert und keine der Determinanten verschwindet, dann gilt die *Masterformel für Residuenintegration in Zwillingsvariablen*:

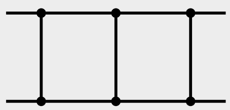
$$\int dl_1 dl_2 \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i(l_1,l_2)} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \Bigg[\left\{ \theta\left(\frac{\Im(\alpha_i)}{\beta_{i1}}\right) - \theta\left(\frac{\Im(\alpha_n)}{\beta_{n1}}\right) \right\} \left\{ \theta\left(\frac{\beta_{i1}\Im(\alpha_j) - \beta_{j1}\Im(\alpha_i)}{\beta_{i1}\beta_{j2} - \beta_{i2}\beta_{j1}}\right) - \theta\left(\frac{\beta_{i1}\Im(\alpha_n) - \beta_{n1}\Im(\alpha_i)}{\beta_{i1}\beta_{n2} - \beta_{i2}\beta_{n1}}\right) \right\}$$

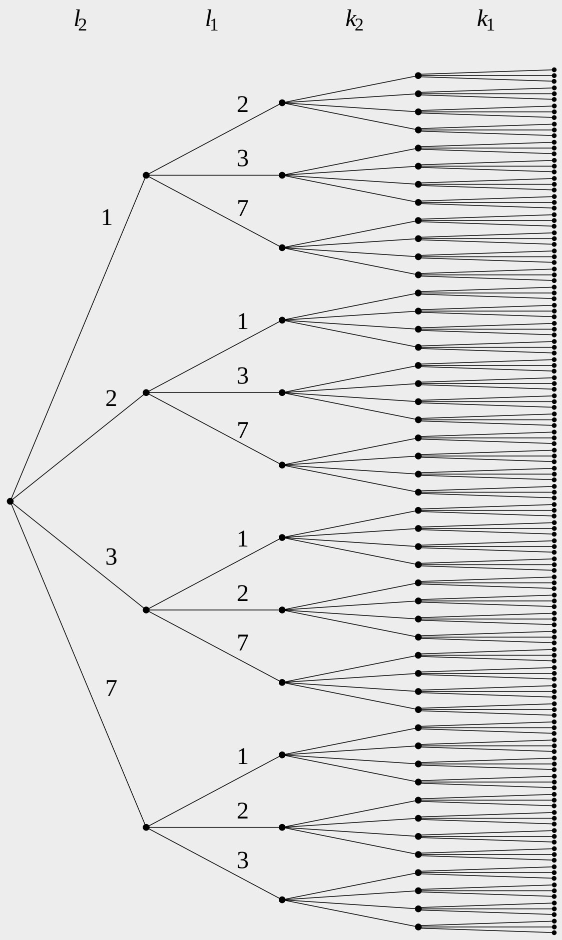
$$- \left\{ \theta\left(\frac{\Im(\alpha_j)}{\beta_{j1}}\right) - \theta\left(\frac{\Im(\alpha_n)}{\beta_{n1}}\right) \right\} \left\{ \theta\left(\frac{\beta_{j1}\Im(\alpha_i) - \beta_{i1}\Im(\alpha_j)}{\beta_{j1}\beta_{i2} - \beta_{j2}\beta_{i1}}\right) - \theta\left(\frac{\beta_{j1}\Im(\alpha_n) - \beta_{n1}\Im(\alpha_j)}{\beta_{j1}\beta_{n2} - \beta_{j2}\beta_{n1}}\right) \right\} \Bigg]$$

$$\times\ (2\pi i)^2 \frac{(\beta_{j2}\beta_{i1} - \beta_{j1}\beta_{i2})^{n-3}}{\begin{vmatrix} \beta_{i1} & \beta_{i2} & \alpha_i \\ \beta_{j1} & \beta_{j2} & \alpha_j \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \alpha_n \end{vmatrix} \displaystyle\prod_{l \neq i,j,n} \begin{vmatrix} \beta_{i1} & \beta_{i2} & \alpha_i \\ \beta_{j1} & \beta_{j2} & \alpha_j \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \alpha_l \end{vmatrix}}$$

Symbolische Zusammenfassungen

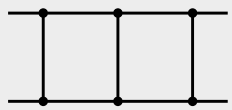
Z.B. planare Box: 

Naive Residuenintegration:



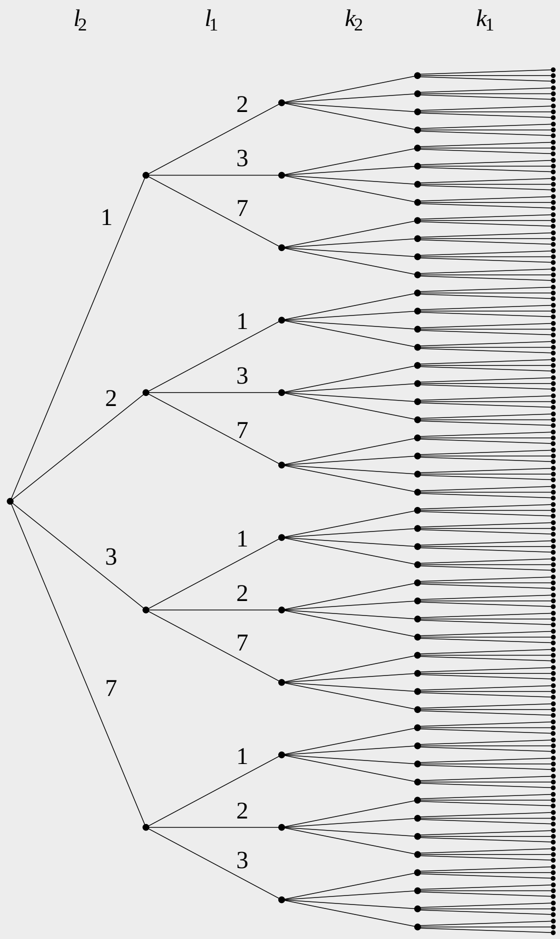
$\Rightarrow$ 144 Summanden

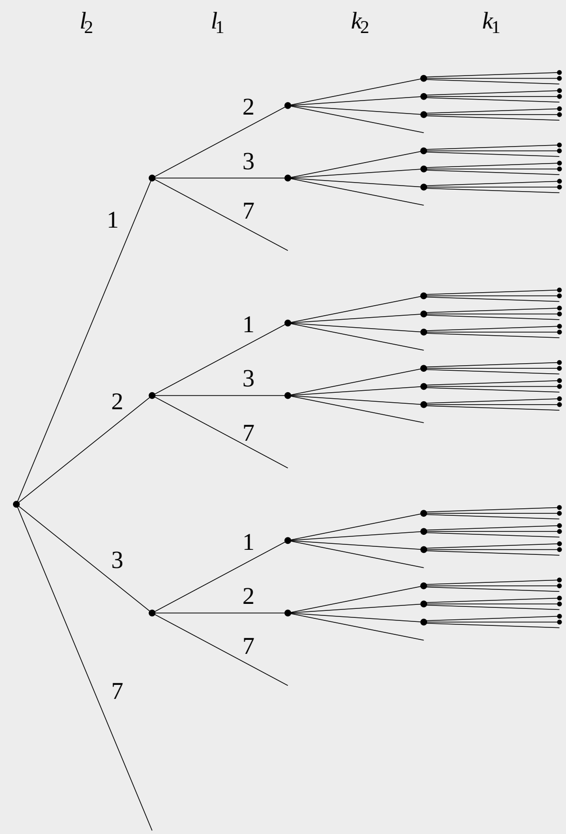
Symbolische Zusammenfassungen

Z.B. planare Box: 

Naive Residuenintegration:

$\sum \mathrm{Res} = 0$:

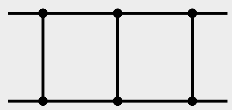




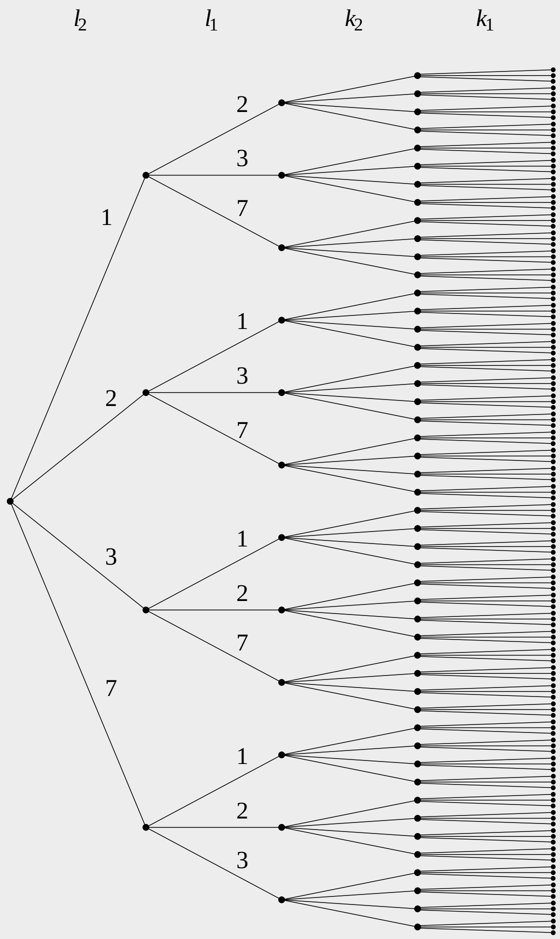
$\Rightarrow$ 144 Summanden

$\Rightarrow$ 36 Summanden

Symbolische Zusammenfassungen

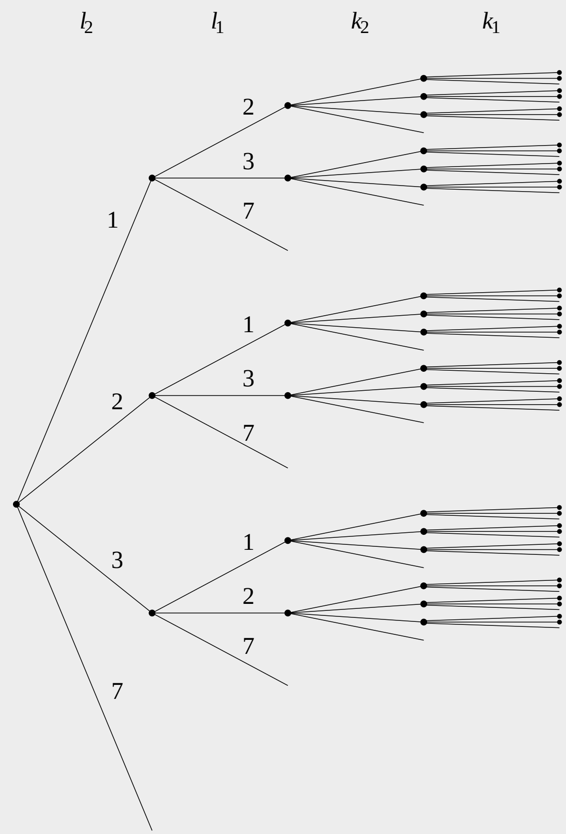
Z.B. planare Box: 

Naive Residuenintegration:



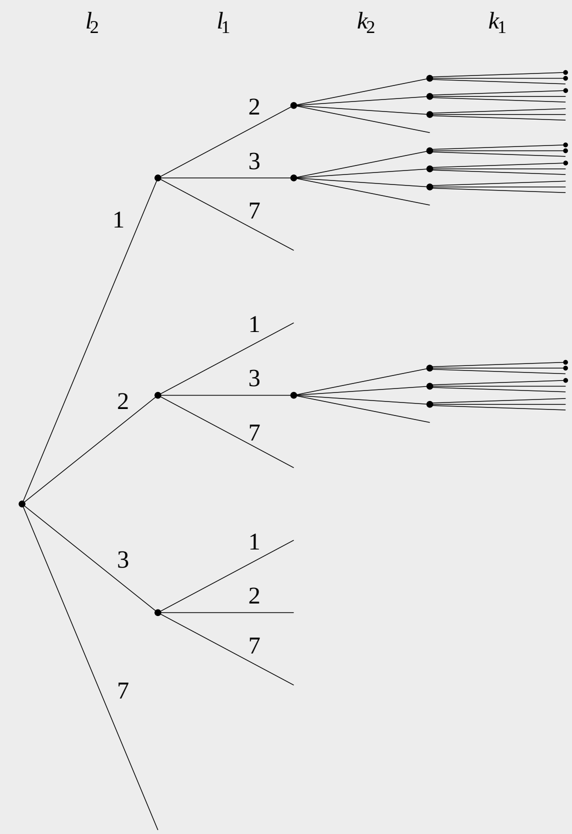
$\Rightarrow$ 144 Summanden

$\sum \mathrm{Res} = 0$:



$\Rightarrow$ 36 Summanden

$(i \rightarrow j) = -(j \rightarrow i)$:



$\Rightarrow$ 9 Summanden

Vereinfachungen der θ-Funktionen

1) Quadratfreie Faktorisierung: ✔

$$\theta(P_i \cdot P_{ii}^2 \cdot P_{iii}^3 \cdots) \longrightarrow \theta(P_i \cdot P_{iii} \cdots)$$

Vereinfachungen der θ-Funktionen

1) Quadratfreie Faktorisierung: ✔

$$\theta(P_i \cdot P_{ii}^2 \cdot P_{iii}^3 \cdots) \longrightarrow \theta(P_i \cdot P_{iii} \cdots)$$

2) Idempotenz / Tautologie: ✔

$$\theta(P)^n = \theta(P)$$

Vereinfachungen der θ-Funktionen

1) Quadratfreie Faktorisierung: ✔

$$\theta(P_i \cdot P_{ii}^2 \cdot P_{iii}^3 \cdots) \longrightarrow \theta(P_i \cdot P_{iii} \cdots)$$

2) Idempotenz / Tautologie: ✔

$$\theta(P)^n = \theta(P)$$

3) Produktbildung: ✔

$$\theta(P_i P_{ii}) = \theta(P_i)\theta(P_{ii}) + \theta(-P_i)\theta(-P_{ii})$$

Vereinfachungen der θ-Funktionen

1) Quadratfreie Faktorisierung: ✔

$$\theta(P_i \cdot P_{ii}^2 \cdot P_{iii}^3 \cdots) \longrightarrow \theta(P_i \cdot P_{iii} \cdots)$$

2) Idempotenz / Tautologie: ✔

$$\theta(P)^n = \theta(P)$$

3) Produktbildung: ✔

$$\theta(P_i P_{ii}) = \theta(P_i)\theta(P_{ii}) + \theta(-P_i)\theta(-P_{ii})$$

4) Spiegelung: ✔

$$\theta(-P) = 1 - \theta(P)$$

Vereinfachungen der θ-Funktionen

1) Quadratfreie Faktorisierung: ✔

$$\theta(P_i \cdot P_{ii}^2 \cdot P_{iii}^3 \cdots) \longrightarrow \theta(P_i \cdot P_{iii} \cdots)$$

2) Idempotenz / Tautologie: ✔

$$\theta(P)^n = \theta(P)$$

3) Produktbildung: ✔

$$\theta(P_i P_{ii}) = \theta(P_i)\theta(P_{ii}) + \theta(-P_i)\theta(-P_{ii})$$

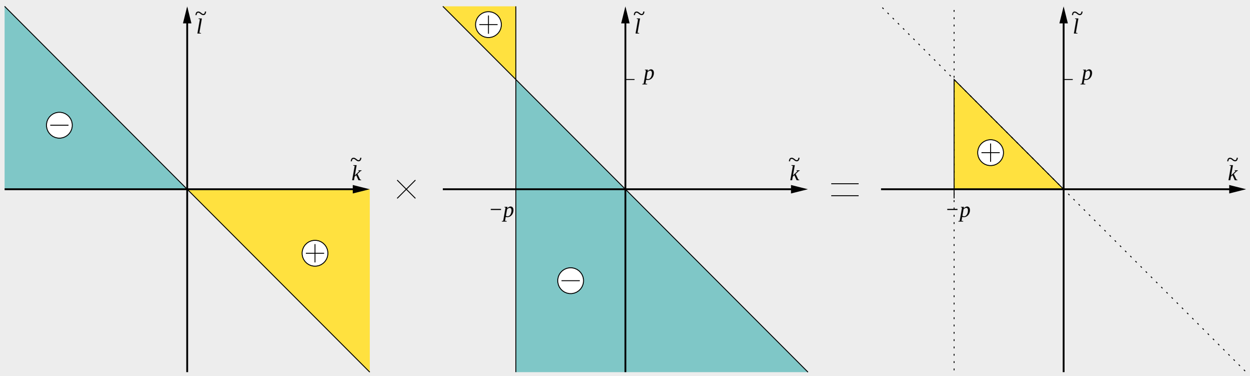
4) Spiegelung: ✔

$$\theta(-P) = 1 - \theta(P)$$

Rekursive Anwendung von 3) und 4):

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \theta(P_i P_{ii}) & = & 2\theta(P_i)\theta(P_{ii}) - \theta(P_i) - \theta(P_{ii}) + 1 \\ \theta(P_i P_{ii} P_{iii}) & = & 4\theta(P_i)\theta(P_{ii})\theta(P_{iii}) \\ & & \quad - 2\theta(P_i)\theta(P_{iii}) - 2\theta(P_i)\theta(P_{ii}) - 2\theta(P_{ii})\theta(P_{iii}) \\ & & \quad + \theta(P_i) + \theta(P_{ii}) + \theta(P_{iii}) \\ & \vdots & \end{array} \right.$$

Die auftretenden Integrationsgebiete (Beispiel)

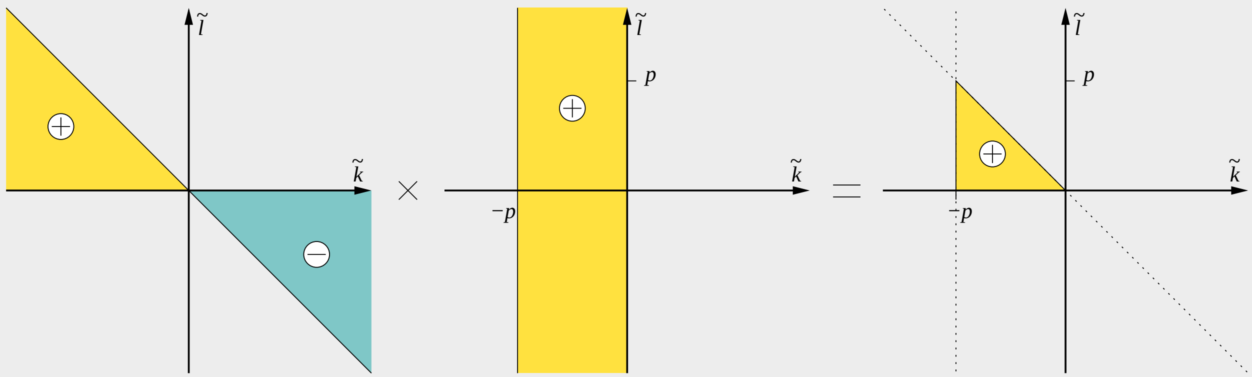


$$\Theta := \left\{\theta(-\tilde{l}) - \theta(-\tilde{k}-\tilde{l})\right\}\left\{\theta(-\tilde{k}-p) - \theta(\tilde{k}\,\tilde{l}\,(\tilde{k}+\tilde{l}))\right\}$$

$$= \left\{\theta(-P_{iii}) - \theta(P_{iv})\right\}\left\{\theta(P_{ii}) - \theta(-P_i P_{iii} P_{iv})\right\}$$

$$\text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} P_i & = & \tilde{k} \\ P_{ii} & = & -\tilde{k} - p \\ P_{iii} & = & \tilde{l} \\ P_{iv} & = & -\tilde{k} - \tilde{l} \end{array} \right.$$

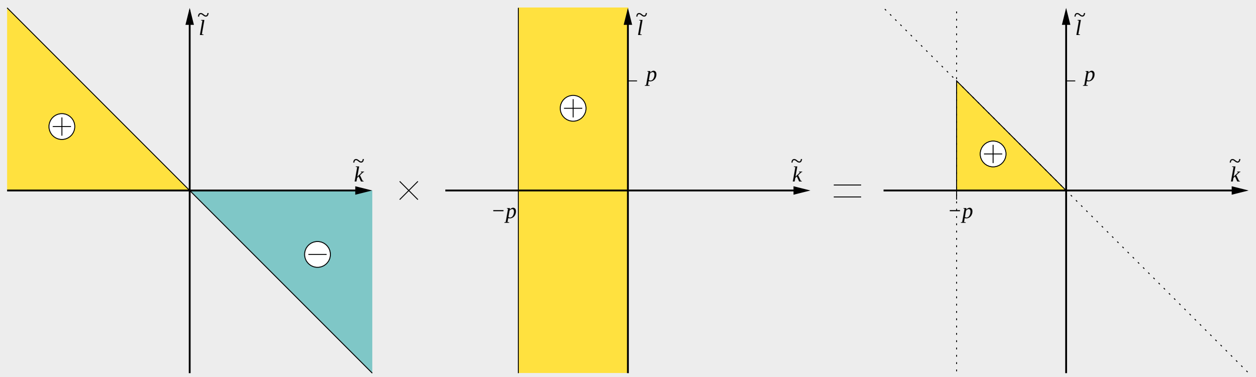
Die auftretenden Integrationsgebiete (Beispiel)



Nach Regeln 1) - 4) und quadratfreier Faktorisierung:

$$\Theta = \left\{\theta(\tilde{l}) + \theta(-\tilde{k}-\tilde{l}) - 1\right\}\left\{1 - \theta(\tilde{k}) - \theta(-\tilde{k}-p)\right\}$$ ✔

Die auftretenden Integrationsgebiete (Beispiel)



Nach Regeln 1) - 4) und quadratfreier Faktorisierung:

$$\Theta = \left\{\theta(\tilde{l}) + \theta(-\tilde{k}-\tilde{l}) - 1\right\}\left\{1 - \theta(\tilde{k}) - \theta(-\tilde{k}-p)\right\}$$ ✔

Nach Verwendung von Deduktionen basierend auf Ordnungsrelationen wie $p > 0 \;\; \wedge \;\; -\tilde{k} - p > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \tilde{k} < 0, \ldots$

$$\Theta = \theta(\tilde{l})\,\theta(-\tilde{k} - \tilde{l})\,\theta(-\tilde{k})\,\theta(\tilde{k}+p)$$ ✔ - ✘

Zusammenfassung und Ausblick

- Mehrfache Anwendung des Residuensatzes. . .

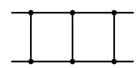
  . . . erlaubt es, frühzeitig identische Terme zu aufzufinden (ohne sie zu berechnen). . . ✔

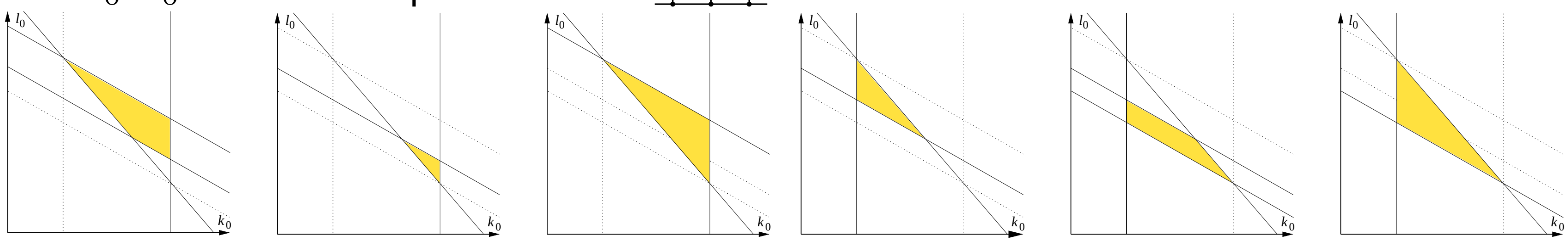
  . . . und algebraisch soweit zu vereinfachen, dass sie computerdarstellbar bleiben.

- Umformungen der auftretenden Integrationsgebiete. . .

  . . . führt zu durch Geraden beschränkte Integrationsgebieten („Splitter")

  in k_0-l_0- und k_3-l_3-Ebenen. ✔ – ✘

  z.B. l_0-k_0-Gebiete der planaren Box  :



- Numerische Vierfachdarstellung in endlichen Integrationsgebieten. . .

  . . . stabil unterhalb kinematischer Schwellen. . . ✔

  . . . aber instabil oberhalb kinematischer Schwellen. (Hauptwertintegral!) ✘